# Jeux sous formes extensive

## *Cours : DEA APE Micro II*


Olivier Gossner

`Olivier.Gossner@enpc.fr`

CERAS, Fédération Jourdan

# Introduction

Dans les cours précédents, nous avons toujours supposé que les joueurs connaissent parfaitement et les règles du jeu, y compris les utilités de tous les joueurs associées à chaque issue possible du jeu.
Comment fait-on lorsque ceci n'est pas vérifié ? Exemples : Cournot, enchères, votes ...

# Exemple

Considérons les deux variations suivantes du dilemme du prisonnier qui diffèrent par l'utilité du joueur 2 s'il joue $T$.

| | $S$ | $T$ |
|---|---|---|
| $S$ | 0,-2 | -10,1 |
| $T$ | -1,-10 | -5,-5 |

| | $S$ | $T$ |
|---|---|---|
| $S$ | 0,-2 | -10,-7 |
| $T$ | -1,-10 | -5,-11 |

Que peut-on dire si le joueur 2 sait quelle version du jeu est jouée mais le joueur 1 ne le sait pas ?

# Astuce fondamentale

On supposera que le joueur 1 a une croyance sur le jeu qui est joué (Savage). Soit $0 < \mu < 1$ la croyance que le jeu est le premier et $1 - \mu$ le second. Ceci revient à dire que:

- En première période, la Nature tire le jeu selon la loi $(\mu, 1 - \mu)$.
- Le joueur 2 est informé du résultat, mais pas le joueur 1.
- Le joueur 1 et le joueur 2 choisissent simultanément $S$ ou $T$.

# Résolution

- Représenter ce nouveau jeu sous forme extensive.
- Quels sont les ensembles de stratégies pour chacun des joueurs ?
- Résoudre le jeu.

# Plan du cours

1. Modèle général
2. Méthode de résolution
3. Applications

# Modèle de jeux bayésiens

Un jeu bayésien est donné par

- Un ensemble de joueurs $I$ ;
- Des ensembles de types $\Theta_i$ ;
- Une loi $P_\Theta$ sur $\Theta = \Pi_i \Theta_i$ ;
- Des ensembles $S_i$ de stratégies, $S = \Pi_i S_i$ ;
- Des fonctions d'utilité $g_i \colon S \times \Theta \to \mathbb{R}$.

# Déroulement du jeu

1. La nature tire un profil $\theta = (\theta_i)_i$ selon $P_\Theta$ ;
2. Chaque joueur $i$ est informé de $\theta_i$ ;
3. Chaque joueur $i$ choisit $s_i$, $s = (s_i)_i$ ;
4. L'utilité pour $i$ est $g_i(s, \theta)$.

# Cas particuliers

Utilités personnelles connues :
$g_i$ ne dépend pas de $\theta_{-i}$, et peut donc s'écrire $g_i(s, \theta_i)$.

Types indépendants:
Les types sont tirés indépendamment, $P_{\Theta}(\theta) = \Pi_i P_{\Theta}(\theta_i)$. Le type d'un joueur ne le renseigne pas sur les types des autres.

# Forme normale et Nash

Une stratégie (pure) pour le joueur $i$ est une application $f_i\colon \theta_i \to S_i$. Le paiement (espéré) du joueur $i$ correspondant à un profil de stratégies $f = (f_j)_j$ est

$$U_i(f) = \sum_{\theta\in\Theta} P_\Theta(\theta) g_i((f_j(\theta_j))_j, \theta))$$

Ceci définit le jeu bayésien sous forme normale.

**Définition** Un **équilibre de Nash bayésien** est un équilibre de cette forme normale.

# Discussion

Pourquoi la résolution d'un jeu bayésien fait-elle intervenir tous les types d'un joueur ? Après tout, si je suis de type $\theta_i$, je devrais juste chercher à prendre une bonne décision étant donné ce type, sans avoir à me préoccuper de ce que j'aurais fait si j'avais été d'un autre type $\theta_i'$ !!

# Discussion 2

La réponse tient au fait que pour chercher une bonne décision étant donné $\theta_i$, je dois me demander ce que feront autres joueur *dans tous leurs types possibles*. Les autres joueurs ne savent pas forcément que je suis de type $\theta_i$. Par conséquent, ils peuvent se demander ce que je ferais moi si j'étais de type $\theta_i'$. Donc moi aussi je devrais me le demander !!!

# Raisonnement à type donné

Soit $\Theta_i'$ l'ensemble des types de $i$ ayant $P_\Theta$ probabilité $> 0$. Supposons que le joueur $i$ soit de type $\theta_i \in \Theta_i'$ et pense que les autres joueurs utilisent les stratégies $f_{-i}$. Conditionnellement à $\theta_i' \in \Theta_i'$, la croyance de $i$ sur $\Theta$ est $P_{\theta_i'} = P_\Theta(\cdot \mid \theta_i')$. Le paiement espéré conditionnel à $\theta_i$ en jouant $s_i$ est alors :

$$V_i(s_i, \theta_i, f_{-i}) = \sum_{\theta_{-i}} P_{\theta_i'}(\theta_{-i}) g_i(s_i, f_{-i}(\theta_{-i}), \theta_i, \theta_{-i})$$

# Meilleures réponses

**Proposition** $f_i$ est une meilleure réponse à $f_{-i}$ si et seulement si pour tout $\theta_i \in \Theta_i'$,
$f_i(\theta_i)$ maximise $V_i(\cdot, \theta_i, f_{-i})$

Pour jouer une meilleure réponse à des stratégies données aux autres joueurs, il faut et il suffit donc de jouer une meilleure réponse type par type !!

# Vente de voitures d'occasion

Une voiture peut être de bonne ($B$) ou mauvaise ($M$) qualité avec probabilités $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le vendeur connaît la qualité, et l'acheteur non. Les choix possibles du vendeur sont de chercher à vendre ($V$), ou non ($NV$). L'acheteur peut choisir d'acheter ($A$), ou non ($NA$). Le prix $p$ est fixé à l'avance. Les utilités pour la voiture sont de 3 pour le vendeur et 4 pour l'acheteur si la qualité est bonne, et de 0 pour les deux sinon.

# Résolution

- Décrire la situation comme un jeu bayésien ;
- Quels sont les ensembles de stratégies ?
- A-t-on types indépendants ? Utilités personnelles connues ?
- Résoudre pour les différentes valeurs de $p$.

# Valeur de l'information

Deux joueurs, A et B, cherchent à deviner le tirage d'une pièce de monnaie, pile ou face.
A annonce son choix (B entend A), puis B. Les gains sont de 3 pour un joueur le seul à bien deviner, de 1 chacun si les deux devinent bien, et de 0 pour un joueur qui devine mal.
Cas 1 : A connaît le résultat du tirage.
Cas 2 : A ne connaît pas le résultat du tirage.
Quel cas est est le plus favorable à chacun des joueurs ?

# Marché du travail

Pour comprendre si le niveau d'études peut servir à signaler la qualité d'un candidat au travail, on étudie le modèle suivant :

1. Un travailleur peut avoir une productivité de 1 ou de 2 avec probabilités $(\pi, 1-\pi)$ ;
2. Le travailleur choisit un niveau d'études $y \geq 0$
3. 2 employeurs proposent des salaires $w_1(y)$ et $w_2(y)$ en fonction du niveau d'études observé $y$ ;
4. Le travailleur choisit un employeur.

# Utilités

Le coût pour un agent de type (productivité) $t$ du niveau d'éducation $y$ est $\frac{y}{t}$ (donc plus élevé pour un travailleur de productivité plus basse).
L'utilité pour un joueur de type $t$ qui choisit le niveau d'éducation $y$ et qui touche le salaire $w$ est $w - \frac{y}{t}$.
L'utilité pour une firme qui n'embauche pas est 0.
L'utilité pour une firme qui embauche le type $t$ au salaire $w$ est $t - w$.

# Simplifications

A la fin du jeu, le travailleur choisit le salaire le plus élevé. Les deux firmes sont donc en compétition de Bertrand et proposent le même salaire : $w(y) = w_1(y) = w_2(y)$.
Ce salaire correspond à l'espérance de la productivité étant donné $y$, donc $1 \leq w(y) \leq 2$.

# Équilibres mélangeants

On appelle ainsi un équilibre du jeu dans lequel les deux types de travailleurs choisissent le même niveau d'études: $(y_1 = y_2 = y)$.

On a un équilibre de ce type pour $y \leq 1 - \pi$.

# Équilibres séparateurs

On appelle ainsi un équilibre du jeu dans lequel les deux types de travailleurs choisissent différents niveaux d'études: $(y_1 \neq y_2)$.

On a un équilibre de ce type pour $y_1 = 0$ et $1 \leq y_2 \leq 2$.

# Enchères

Deux acheteurs potentiels pour un même objet. Les valuations $(v_1, v_2)$ sont distribuées uniformément et indépendemment dans l'intervalle $[0, 1]$.
Le vendeur (qui ne connaît pas les valuations) a le choix entre une enchère au premier prix, ou au second prix. Quel est le meilleur choix (celui qui permet de maximiser les revenus espérés) ?

# Enchères au second prix

Quels sont les joueurs ?
Quels sont les ensembles de stratégies ?
Quelles sont les fonctions de paiement ?

Chaque joueur a une stratégie faiblement dominante. Ces stratégies forment un équilibre de Nash.

# Enchères au premier prix

Quels sont les joueurs ?
Quels sont les ensembles de stratégies ?
Quelles sont les fonctions de paiement ?

On cherche un équilibre de Nash symmétrique dans lequel chaque joueur joue une stratégie $f$ différentiable strictement croissante.

On écrit que $f(\theta_i)$ maximise le paiement espéré.

# Calcul des revenus

Quel est le revenu espéré du vendeur dans chacun des cas ?

Conclusion ?

Ce résultat n'est pas du au hasard, c'est un cas particulier d'un résultat plus général, le **théorème d'équivalence des revenus.**