**Ecole Polytechnique, 2ème Année, Eco-434 Economie Internationale**
**PC 2 - Le modèle Hecksher-Ohlin-Samuelson**

**1)** En concurrence parfaite, la maximisation du profit implique l'égalisation du prix des facteurs à leur productivité marginale :

$$\frac{w}{p_1} = (1-\alpha)k_1^{\alpha} \quad \frac{w}{p_2} = (1-\beta)k_2^{\beta}$$
$$\frac{r}{p_1} = \alpha k_1^{\alpha-1} \quad \frac{r}{p_2} = \beta k_2^{\beta-1}$$

Ce qui implique :

$$\omega = \frac{1-\alpha}{\alpha}k_1 = \frac{1-\beta}{\beta}k_2$$

c'est-à-dire :

$$k_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\omega \quad k_2 = \frac{\beta}{1-\beta}\omega \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{\beta}{1-\beta}\frac{1-\alpha}{\alpha}$$

A prix relatif du travail donné ($\omega$), le ratio capital sur travail est plus élevé dans le secteur 2 lorsque $\beta > \alpha$ : le secteur 2 est relativement intensif en capital (à quantité de travail et de capital $L$ et $K$ données, la productivité marginale du capital est plus élevée dans le secteur 2, ce qui conduit à un ratio capital sur travail plus élevé à l'optimum de la firme).

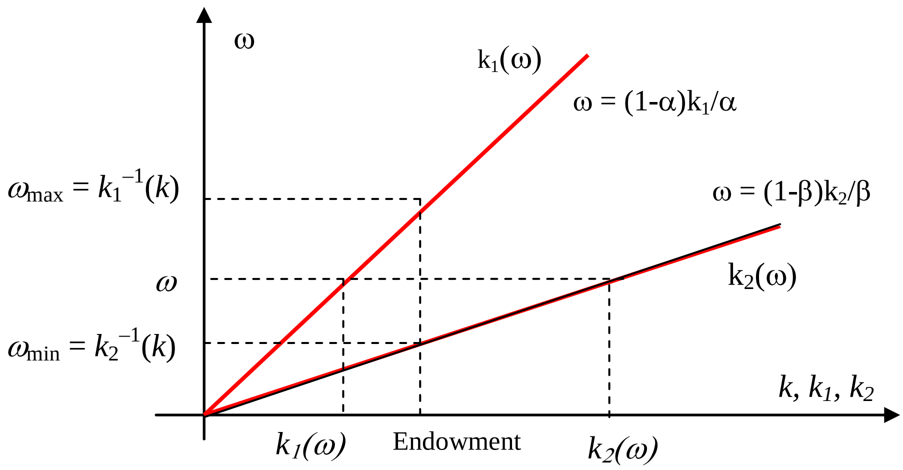
Une hausse du coût relatif du travail ($\uparrow$ de $\omega$) conduit la firme à substituer du capital à du travail. La substitution est plus intense dans le secteur 2 que dans le secteur 1 du fait de la moindre intensité en travail du secteur 2 : Il faut moins d'unités de capital pour substituer une unité de travail dans le secteur 2 que dans le secteur 1, ce qui augmente l'incitation à la substitution.

Etant donné un prix relatif du travail ($\omega$ déterminé à l'équilibre du marché), le ratio capital sur travail optimal est plus élevé dans le secteur 2 ($\kappa > 1$). Ici aussi, c'est une conséquence de la relative intensité en capital de la production du bien 2 : pour une quantité donnée de capital, la productivité marginale est plus élevée que dans le secteur 1, donc la firme choisit d'utiliser plus de capital.

$k_i(\omega)$ est le ratio capital sur travail optimal étant donné la compensation relative du travail. Ce ratio est une fonction croissante de $\omega$, et ce d'autant plus dans le secteur 2. Par conséquent, la pente de $k_1^{-1}(\omega)$ est plus élevée que celle de $k_2^{-1}(\omega)$.

La spécialisation des économies dans la production sectorielle dépend de $\omega$. Le régime de spécialisation a deux solutions en coin :

- Pour $\omega_{min} = \frac{1-\beta}{\beta}k$, le ratio capital sur travail à l'optimum du secteur 2 coincide avec le ratio capital sur travail de l'économie dans son ensemble. Dans cette situation, le pays se spécialise complètement dans la production du bien 2, ce qui permet d'atteindre le plein-emploi des facteurs. Pour $\omega < \omega_{min}$, le pays se spécialise complètement dans la production du bien 2 car le prix relatif du travail est plus proche de $k_2^{-1}(k)$ que de $k_1^{-1}(k)$. En se spécialisant dans la production du bien 2, le pays est donc plus proche du plein emploi.
- Pour $\omega_{max} = \frac{1-\alpha}{\alpha}k$, le ratio optimal capital sur travail dans le secteur 1 coincide avec le ratio capital sur travail de l'économie dans son ensemble. Dans cette situation, le pays se spécialise complètement dans la production du bien 1. Pour $\omega > \omega_{max}$, le pays se spécialise également dans la production du bien 1 car le prix relatif du travail est plus proche de $k_1^{-1}(k)$ que de $k_2^{-1}(k)$, le pays est donc plus proche du plein-emploi des facteurs.
- Pour $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$, le ratio optimal capital sur travail dans le secteur 1 est plus faible que dans l'économie dans son ensemble tandis que celui du secteur 2 est plus élevé. En produisant les deux biens, le pays peut donc atteindre, en moyenne, un ratio capital sur travail égal à celui de l'économie dans son ensemble. L'économie peut produire au plein-emploi des facteurs.




**2) Le théorème de Stolper-Samuelson** : En concurrence parfaite, la firme représentative prend le prix relatif du travail $\omega$ comme une donnée exogène. Par conséquent, les ratios $k_1$ et $k_2$ sont donnés (puisqu'ils ne dépendent que de $\omega$). Le taux marginal de transformation est obtenu à partir des fonctions de production $Y_1 = k_1^\alpha L_1$ et $Y_2 = k_2^\beta L_2$ :

$$TMT = -\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1} = -\frac{\partial Y_2}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial Y_1} = \frac{k_2^\beta}{k_1^\alpha} = \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^\beta \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-\alpha} \omega^{\beta-\alpha}$$

Le TMT est une fonction croissante de $\omega$. Plus le prix relatif du travail est élevé, plus $Y_2$ diminue lorsque la production marginale de bien 1 augmente. En effet, une augmentation de $\omega$ conduit à une augmentation de $k_2$ plus rapide que celle de $k_1$ : il y a plus de substitution de capital dans le secteur 2 que dans le secteur 1. Par conséquent, la productivité marginale du travail est plus élevée dans le secteur 2, lorsque $\omega$ atteint un niveau plus élevé. Réduire l'emploi dans le secteur 2 est alors plus coûteux que de réduire l'emploi lorsque $\omega$ est stabilisé à un niveau faible.

A l'équilibre concurrentiel, $TMT = p$, et donc :

$$\frac{dp}{p} = (\beta - \alpha)\frac{d\omega}{\omega}$$

Pour $\beta > \alpha$, une hausse du prix relatif du bien 1 $p$ conduit à une hausse de la rémunération relative du travail, utilisé de manière plus intensive dans le secteur 1. C'est le **théorème de Stolper-Samuelson**.

Le TMT est aussi égal à la pente de la FPP, lieu de toutes les combinaisons possibles de productions sectorielles. Le long de la FPP, on a $k_1 = \alpha/(1-\alpha)\omega$ et $k_2 = \beta/(1-\beta)\omega$.

**3) Le théorème de Rybczynski** :

$$\left\{\begin{array}{l} k_1 L_1 = K - k_2(L - L_1) \\ k_2 L_2 = K - k_1(L - L_2) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k_1 \frac{L_1}{L} = k - k_2(1 - \frac{L_1}{L}) \\ k_2 \frac{L_2}{L} = k - k_1(1 - \frac{L_2}{L}) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{L_1}{L} = \frac{k-k_2}{k_1-k_2} \\ \frac{L_2}{L} = \frac{k-k_1}{k_2-k_1} \end{array}\right.$$

A $\omega$ constant, $k_1$ et $k_2$ sont également constants. Par différenciation :

$$\left\{\begin{array}{l} L_1 = \frac{k-k_2}{k_1-k_2} L \\ L_2 = \frac{k-k_1}{k_2-k_1} L \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{dL_1}{dL} = \frac{-k_2}{k_1-k_2} \\ \frac{dL_2}{dL} = \frac{-k_1}{k_2-k_1} \end{array}\right.$$

Une hausse de $L$ conduit donc à une augmentation de $L_1$ mais une baisse de $L_2$. Pour le comprendre, revenons aux fonctions de production :

$$Y_1 = k_1^\alpha L_1 \quad \text{and} \quad Y_2 = k_2^\beta L_2$$

et différencions :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{k-k_2}{k_1-k_2} L \\ L_2 = \frac{k-k_1}{k_2-k_1} L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dL_1}{dL} = \frac{-k_2}{k_1-k_2} \\ \frac{dL_2}{dL} = \frac{-k_1}{k_2-k_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} dY_1 = k_1^\alpha dL_1 = -\frac{k_1^\alpha k_2}{k_1-k_2} dL \\ dY_2 = k_2^\beta dL_2 = -\frac{k_2^\beta k_1}{k_2-k_1} dL \end{cases}$$

Lorsque la population active augmente de manière exogène, la production augmente dans le secteur relativement intensif en travail et diminue dans le secteur intensif en capital. C'est le **théorème de Rybczynski**.

**4)** $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{k_1^\alpha L_1}{k_2^\beta L_2} = -\frac{k_1^\alpha}{k_2^\beta}\frac{k-k_2}{k-k_1}$ et $\frac{pC_1}{C_2} = 1$. En autarcie : $Y_1 = C_1$ et $Y_2 = C_2$ ce qui implique :

$$p = -\frac{k_2^\beta}{k_1^\alpha}\frac{k-k_1}{k-k_2}$$

On se retrouve donc avec deux équations liant $p$ et $\omega$ (celle-ci et celle obtenue à la question 2). On en déduit les valeurs de $\omega$ et $p$ à l'équilibre autarcique. La comparaison du prix autarcique avec le prix relatif d'équilibre sur les marchés internationaux permet d'établir la structure du commerce du pays avec le reste du monde.

Il existe une relation croissante entre $k$ et $p$ :

$$\frac{\partial p}{\partial k} = -\frac{k_2^\beta}{k_1^\alpha}\frac{k_1-k_2}{(k-k_2)^2} > 0$$

Plus la dotation relative en capital augmente, plus le prix relatif du bien intensif en travail augmente à l'équilibre autarcique.

**5)** Si $k < k^*$, alors à l'autarcie $p < p^*$. La libéralisation commerciale conduit à une hausse de $p$ et une baisse de $p^*$, donc à une hausse de $\omega$ et une baisse de $\omega^*$ (c'est le **théorème de Stolper-Samuelson**).