ECO434, Ecole polytechnique, 2e année
PC 5
Flux de Capitaux Internationaux et Déséquilibres Mondiaux

Exercice 1 : Flux de capitaux dans le modèle de croissance néo-classique

$$Y(t) = (K(t))^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha} \quad (1)$$
$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) \quad (2)$$
$$R(t) = w(t)L(t) + r(t)K(t) + r^{*}B(t) \quad (3)$$
$$C(t) = (1-s)R(t) \quad (4)$$

1. On se place en autarcie financière ($B(t) = 0$).
   (a) En autarcie l'investissement national ne peut être financé que par l'épargne nationale impliquant
   $$I(t) = sR(t) = sY(t)$$
   de sorte que l'équation d'évolution du stock de capital s'écrit
   $$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) = s(K(t))^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha} - \delta K(t)$$
   On remarque que le stock de capital n'atteint jamais l'état stationnaire. Supposer $\dot{K}(t) = 0$ aboutirait à une solution non stationnaire $K(t) = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t)L$ contredisant la prémisse.
   (b) En revanche $k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L}$ admet une valeur stationnaire k^a. En notant que $y(t) = k(t)^{\alpha}$ et $\dot{k}(t) = \left(\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g\right) k(t)$ on obtient
   $$\dot{k}(t) = sy(t) - (g+\delta)k(t) = s(k(t))^{\alpha} - (g+\delta)k(t)$$
   A l'état stationnaire
   $$\dot{k}(t) = 0 \Rightarrow k(t) = \left(\frac{s}{g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \equiv k^a$$
   A cet état stationnaire le capital par unité de travail efficient est constant. Donc le capital croît au même taux que le travail efficient, g. La production par unité de travail efficient $y^a = (k^a)^{\alpha}$ est aussi constante donc la production croît au même taux g. On appelle cette situation sentier de croissance équilibré. Les économies ayant un s plus élevé ont un stock de capital plus élevé. Les économies ayant un g plus élevé ont un stock de capital initial plus faible mais croissant plus rapidement. Mêmes remarques pour la production.

(c) On admet que

$$r(t) + \delta = f'(k(t))$$

[on le montre en résolvant le programme de maximisation du profit intertemporel actualisé en $L(t)$ et $I(t)$ sous la contrainte de la loi d'évolution du capital, mais c'est fastidieux]

On obtient

$$f'(k^a) - \delta = \alpha(k^a)^{\alpha-1} - \delta = \frac{\alpha(g+\delta)}{s} - \delta \equiv r^a \tag{5}$$

en utilisant la définition de k^a. Ce taux est constant.

On en déduit que

$$k^a = \left(\frac{\alpha}{r^a + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Le stock de capital par unité de travail efficient est une fonction décroissante du taux d'intérêt autarcique. Les différences entre pays de ce taux capturent les différences entre pays de g ou s. A g donné, un pays avec un fort taux d'épargne aura un taux d'intérêt d'autarcie faible et un stock de capital plus élevé.

2. Petite économie ouverte. $r(t) = r^*$.

(a)

$$r^* + \delta = f'(k) \Rightarrow k = \left(\frac{\alpha}{r^* + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ce stock de capital par unité de travail efficient est constant en raison de l'hypothèse de taux d'intérêt et de taux de dépréciation constants : le producteur doit maintenir $f'(k)$ constant. Il est indépendant de s parce que ce taux d'intérêt ne dépend plus de s : quelle que soit l'épargne nationale, le producteur national trouvera un financement (éventuellement par l'épargne étrangère) si il offre un rendement r^* au financeur.

On remarque que

$$r^a > r^* \Leftrightarrow k^a < k$$

Un pays dont le rendement autarcique est supérieur au reste du monde atteindra un stock de capital plus élevé à l'ouverture : l'ouverture lui aura permis de réduire le coût du capital (une partie de l'épargne étrangère sera attirée par les rendements supérieurs). Inversement un pays dont le rendement autarcique est inférieur au reste du monde atteindra un stock de capital plus faible à l'ouverture (une partie de l'épargne nationale ira chercher des rendements supérieurs à l'étranger).

(b) Par définition la richesse nationale s'écrit

$$\tilde{W}(t) = K(t) + B(t) \Rightarrow \dot{\tilde{W}}(t) = \dot{K}(t) + \dot{B}(t)$$

En utilisant (2), (4) et l'identité comptable nationale[1] $\dot{B}(t) = SC(t) = sR(t) - I(t)$, on obtient

$$\dot{\tilde{W}}(t) = sR(t) - \delta K(t)$$

En utilisant (3) on a

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{w}}(t) &= \left(\frac{\dot{\tilde{W}}(t)}{\tilde{W}(t)} - g \right) \tilde{w}(t) \\
&= \frac{sw(t)L - \delta K(t)}{A(t)L} + (sr^* - g)\tilde{w}(t)
\end{aligned}$$

Comme suggéré dans la question on remarque que $\frac{w(t)L}{A(t)L} = (1-\alpha)y$ qui est stationnaire. Par ailleurs $k = \frac{K(t)}{A(t)L}$ est également stationnaire, donc $\tilde{w}(t)$ admet un état stationnaire (noté $\tilde{w}$). On en déduit

$$\tilde{w} = \frac{s(1-\alpha)y - \delta k}{g - sr^*}$$

Finalement $b = \tilde{w} - k$ donc, en remarquant que $(r^* + \delta)k = \alpha y$, on a

$$\begin{aligned}
b &= \frac{s(1-\alpha)\frac{r^*+\delta}{\alpha}k - \delta k}{g - sr^*} - k \\
&= k \left[\frac{s(1-\alpha)\frac{r^*+\delta}{\alpha} - \delta}{g - sr^*} - 1 \right]
\end{aligned}$$

(c) En utilisant (5) on réécrit

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{g + \delta}{r^a + \delta}$$

qu'on substitue dans l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
b &= k \left[\frac{(1-\alpha)(g+\delta)\frac{r^*+\delta}{r^a+\delta} - \delta}{g - sr^*} - 1 \right] \\
b &= \left[\frac{(1-\alpha)(g+\delta)\frac{r^*+\delta}{r^a+\delta} - \delta}{g - sr^*} - 1 \right] \left(\frac{\alpha}{r^* + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

1. L'hypothèse d'égalisation des rendements entre pays et de monnaie unique implique que $\dot{B}(t)$ est égal au solde courant $SC(t)$.

d'où

$$B(t) = \left[\frac{(1-\alpha)(g+\delta)\frac{r^*+\delta}{r^a+\delta} - \delta}{g - sr^*} - 1\right]\left(\frac{\alpha}{r^*+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t)L$$

3. Si le reste du monde fonctionne de la même façon que l'économie autarcique alors

$$r^* = \frac{\alpha(g^*+\delta)}{s^*} - \delta$$

et donc

$$\frac{r^*+\delta}{r^a+\delta} = \frac{s}{s^*}\frac{g^*+\delta}{g+\delta}$$

ce qui implique

$$B(t) = \left[\frac{(1-\alpha)(g^*+\delta)\frac{s}{s^*} - \delta}{g + s\delta - \frac{s}{s^*}\alpha(g^*+\delta)} - 1\right]\left(\frac{s^*}{g^*+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A(t)L$$

La position extérieure nette $B(t)$ est décroissante en g et croissante en $\frac{s}{s^*}$ (et croissante en s sous certaines conditions sur les paramètres). On prédit donc une corrélation négative entre croissance de la productivité g et position extérieure nette, et une corrélation positive entre taux d'épargne s et position extérieure nette. A l'état stationnaire on prédit des flux de capitaux des économies à faible g vers les économies à fort g, et des économies à fort s vers les économies à faible s.

On peut voir une analogie avec la notion d'avantage comparatif en commerce international. Un pays ayant un taux d'intérêt autarcique plus faible que le taux mondial a intérêt à exporter son capital pour bénéficier d'un prix relatif plus faible de la consommation de demain par rapport à la consommation d'aujourd'hui (taux d'intérêt plus élevé) que s'il investissait nationalement comme en autarcie. Le reste du monde a intérêt à consommer plus, épargner moins, et investir le capital étranger pour bénéficier d'un prix relatif plus faible de la consommation d'aujourd'hui.

Exercice 2 : Flux de capitaux et démographie

On s'intéresse aux flux de capitaux dans une petite économie ouverte à deux générations : travailleurs (T) et retraités (R). On se place en temps continu. On fait plusieurs hypothèses simplificatrices pour que l'évolution démographique soit capturée par les paramètres $0 < \lambda < 1$ et $0 < \theta < 1$:

— à chaque période, une fraction λ du nombre existant de travailleurs naît, et devient immédiatement travailleur
— à chaque période, une fraction λ des travailleurs prend sa retraite (indépendamment de l'âge)
— à chaque période, une fraction θ des retraités meurt ; aucun travailleur ne meurt
— le ratio de dépendance économique (nombre de retraités par travailleur) initial est égal à $\frac{\lambda}{\theta}$

On suppose aussi pour simplifier que les agents ne consomment qu'à leur dernière période (au moment de mourir) et que le revenu par période (exogène) vaut Y_t, dont une fraction δ représente la taille du secteur financier. On note r_t le rendement du seul actif financier disponible. Enfin, on suppose que la productivité croît au taux constant g. On note W_t^R et W_t^T la richesse financière d'un retraité et d'un travailleur en t, respectivement.

1. On note N^T et N^R les nombres initiaux de travailleurs et retraités, respectivement. La population des travailleurs est constante puisque les travailleurs partant à la retraite sont exactement remplacés par un nombre égal de nouveaux travailleurs. La population des retraités évolue de la façon suivante :

$$N_1^R = (1-\theta)N^R + \lambda N^T = (1-\theta)N^R + \theta N^R = N^R$$

   Donc le ratio de dépendance reste égal à $\frac{\lambda}{\theta}$ en période 1. Par récurrence ce ratio est constant.

   Le paramètre θ capture l'espérance de vie. Un allongement de cette espérance (baisse de θ) capture le vieillissement de la population. (le paramètre λ capturant la durée de la vie active)

2. La première égalité vient de l'autarcie et de l'hypothèse que les individus ne consomment qu'au moment de mourir. A chaque période θN^R individus sont sur le point de mourir. Sans motif de transmission, ils consomment toute leur richesse soit θW_t^R.

   Les deux autres équations décrivent la dynamique de la richesse des retraités et travailleurs, respectivement. W_t^R augmente sous l'effet du rendement r, décroît avec la consommation des θN^R individus sur le point de mourir, et augmente avec la richesse des nouveaux retraités. W_t^T augmente également sous l'effet du rendement r et avec l'épargne (avant la mort tout le revenu du travail $(1-\delta)Y_t$ est épargné), et décroît avec le départ à la retraite d'une fraction λ des travailleurs. Les travailleurs venant de naître n'ont pas encore eu le temps d'accumuler de la richesse (et n'ont pas hérité).

3.
$$\frac{\dot{W_t^R}}{W_t^R} = g = (r_t - \theta) + \lambda\theta \frac{W_t^T}{Y_t}$$
$$\frac{\dot{W_t^T}}{W_t^T} = g = (r_t - \lambda) + (1-\delta)\frac{Y_t}{W_t^T}$$

En résolvant ce système on obtient que r est donné par une équation du second degré

$$\lambda\theta(1-\delta) = (g - r + \theta)(g - r + \lambda)$$

Cette équation admet deux racines de signe opposé. La racine positive s'écrit
$$r = \frac{1}{2}\left(2g + \theta + \lambda + \sqrt{(\lambda+\theta)^2 - 4\lambda\theta\delta)}\right)$$

On note que $r > g + \max\{\lambda, \theta\}$ quand $\delta \to 1$ et donc pour tout $\delta < 1$.

4. L'équation de r se réécrit

$$0 = (g - r)(g - r + \lambda) + \theta(g - r + \delta\lambda)$$

r est croissant en θ car $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r-g-\lambda\delta}{2r-2g-\lambda-\theta}$. Cette dérivée est positive puisque $r > g + \max\{\lambda, \theta\}$ et $\lambda\delta < 1$.

Une baisse de θ (vieillissement) implique une baisse du taux d'intérêt autarcique, à g donné. Intuitivement, une baisse de θ allonge la période pendant laquelle les agents accumulent, puisqu'ils ne consomment qu'au moment de mourir. Le mécanisme devrait subsister dans un modèle où les agents consomment à chaque période, tant que les agents désépargnent plus pendant leurs dernières années.

Le modèle implique donc qu'un pays à fort g mais dont la population vieillit accroît son épargne, et peut devenir exportateur de capitaux à l'ouverture.

Ce modèle de cycle de vie simple pourrait expliquer l'abondance de l'épargne chinoise actuelle. Dans le modèle la hausse de l'épargne se produit dès la première période à laquelle on *anticipe* une hausse de l'espérance de vie. En Chine le ratio de dépendance n'était que de 12,7% en 2010, mais selon des projections de l'ONU il sera égal à 45,4% en 2050.